* S B - 0 6 1 6 / 2 5 0 0 *

# SB-0616

## First Year B.Sc./B.A. Examination

**March/April – 2011**

## Mathematics : Paper - I

*(Algebra, Trigonometry & Vector Calculas)*

*(New Course)*

Time : **3** Hours] [Total Marks : **105**

**સુચના :**

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
**Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.**

Name of the Examination :

☛ **F. Y. B.Sc./B.A.**

Name of the Subject :

☛ **Mathematics : Paper - 1 (New)**

☛ Subject Code No. : **0 6 1 6** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Student's Signature

(૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(૩) જમણી બાજુ દર્શાવેલ અંક પ્રશ્નોના ગુણ છે.

(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) માંગ્યા મુજબ જવાબ લખો : ૫

(૧) દ' મોવ્રેનું પ્રમેય લખો.

(૨) $\tan\alpha$ નું $\alpha$ ની પદાવલીમાં વિસ્તરણ લખો.

(૩) $\operatorname{Log} x$ ની મુખ્ય કિંમત લખો.

(૪) સમીકરણોની અસમ પરિણામ સંહતિનો ઉકેલ ક્યારે ન મળે ?

(૫) $\frac{d}{dt}\left\{\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]\right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(બ) નીચેનાની ગણતરી કરીને જવાબ આપો : ૧૦

(૧) $A\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$ માટે $\rho_R(A)$ શોધો.

(૨) શ્રેણિક A નાં લાક્ષણિક બીજો $-2$, $-2$ અને 4 હોય તો A નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો.

(૩) $x = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta,\ y = 2\sin h\theta.\cosh\theta$ સમીકરણો માંથી $\theta$ નું નિરસન કરો.

(૪) સાબિત કરોકે $\sin 2x + i\sinh 2y = 2\sin(x+iy).\cos(x-iy)$.

(૫) સદિશ $\vec{a} = (x+3y)\hat{i} + (y-3z)\hat{j} + (x-2z)\hat{k}$ સોલીનોઈડલ છે ?

૨ (અ) $\cos n\theta$ અને $\sin n\theta$ નું $\cos\theta$ અને $\sin\theta$ ની પદાવલિમાં વિસ્તરણ મેળવો. (જયાં $n$ ધનપૂર્ણાંક છે.) ૬

(બ) સાબિત કરો કે $\tan^{-1}(\cosh\theta - \sinh\theta) = \frac{1}{2}\sin^{-1}(\operatorname{sec}h\,\theta)$. ૬

(ક) સાબિત કરો કે $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta + 2\sin\theta - \sin 3\theta}{\theta + \tan\theta - \tan 2\theta} = -\frac{25}{14}$. ૬

**અથવા**

૨ (અ) $\cos\alpha$ નું $\alpha$ ની પદાવલીમાં વિસ્તરણ મેળવો. (જ્યાં $\alpha$ રેડિયનમાં છે.) ૬

(બ) સાબિત કરો કે ૬

$(2\cosh\theta - 1)(2\cosh 2\theta - 1)(2\cosh 4\theta - 1)(2\cosh\theta + 1) = 2\cosh 8\theta + 1$

(ક) જો $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{2^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\right)$, $r = 1, 2, 3.....$ હોય તો સાબિત કરો ૬

કે $x_1 . x_2 . x_3 ........$ અનંત સુધી $= \cos\pi$ .

૩ (અ) $Log(\alpha + i\beta)$ ની કિંમત શોધો (જ્યાં $\alpha, \beta \in R$). ૬

(બ) $\frac{e^{i\theta}}{1 - k\,e^{i\phi}}$ નું વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક અંશોમાં વિયોજન કરો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે $Tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{1}{4}\{(4n+1)\pi + i\log 3\}$. ૬

**અથવા**

૩ (અ) યુલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો અને તે પરથી $\cos\theta$ અને $\sin\theta$ને ઘાંતાકીય વિધેયના સ્વરૂપે દર્શાવો. ૬

(બ) જો $\alpha + i\beta = \sin^{-1}(u + iv)$ હોય તો સાબિત કરો કે $\sin^2\alpha$ અને ૬

$\cosh^2\beta$ બીજ હોય એવું સમીકરણ $x^2 - \left(1 + u^2 + v^2\right)x + u^2 = 0$ છે.

(ક) સાબિત કરો કે $\log\sin(x+iy) = \frac{1}{2}\log\frac{(\cosh 2y - \cos 2x)}{2}$ ૬

$+ i\tan^{-1}(\cot x \cdot \tanh y)$.

૪ (અ) સાબિત કરો કે દરેક ચોરસ શ્રેણિક A ને અનન્ય રીતે P + i Q વડે દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં P અને Q હર્મેટીઅન શ્રેણિકો છે. ૬

(બ) જો $A=\left[a_{ij}\right]$ જ્યાં $a_{ij}=i\times j$ હોય તો દર્શાવો કે A સંમિત શ્રેણિક છે. ૬

અને જો $a_{ij}=i^2-j^2$ હોય તો દર્શાવો કે A વિસંમિત છે.

(ક) n- અવ્યક્ત ચલોની સુરેખ સંહતિઓ $A_1 X=B_1$ તથા $A_2 X=B_2$ ૬
ક્યારે સમકક્ષ કહેવાય ? દર્શાવો કે

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+2z&=3\\3y+\ \ z&=0\\x-2y&=1\end{aligned}\right\}\ \text{તથા}\ \left\{\begin{aligned}\tfrac{1}{2}x&=\tfrac{3}{2}\\x-2y&=1\\3y+z&=0\end{aligned}\right.$$ સમકક્ષ છે.

**અથવા**

૪ (અ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}3&-6&2&-1\\-2&4&1&3\\0&0&1&1\\1&-2&1&0\end{bmatrix}$ ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો. ૬

(બ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&2&3&2\\-1&-3&0&4\\0&4&-1&-3\end{bmatrix}$ માટે $\rho_R(A)$ મેળવો. ૬

(ક) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\2&1&0\\4&0&5\end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ૬
ઉપયોગ કરીને મેળવો.

૫ (અ) નીચે આપેલી સુરેખ સમપરિણામ (H) સંહતિને ઉકેલો : ૬

$$\begin{aligned}x+y-3z+2w&=0\\2x-y+2z-3w&=0\\3x-2y+z-4w&=0\\-4x+y-3z+w&=0\end{aligned}$$

(બ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&-2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$ માટે કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. ૬

(ક) (૧) જો A અને B સામાન્ય ચોરસ શ્રેણિકો હોય તો દર્શાવો કે $A^{-1}B$ ૬
અને $BA^{-1}$નાં લાક્ષણિક બીજો સરખા હોય છે.

(૨) સાબિત કરો કે આપેલ આત્મ સદિશ X ને સંગત ફક્ત એક જ આત્મ-મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે.

**અથવા**

૫ (અ) યુગપત સમીકરણો ૬

$x+y+z=6$

$x+2y+3z=10$

$x+2y+\lambda z=\mu$

ની સંહતિને $\lambda$ અને $\mu$ ની કઈ કિંમતો માટે

(૧) ઉકેલ નથી ?

(૨) અનન્ય ઉકેલ છે ?

(૩) અસંખ્ય ઉકેલો છે ?

(બ) શ્રેણિક $=A\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ નાં લાક્ષણિક બીજ શોધો અને તેમાંના સૌથી ૬
નાનાં લાક્ષણિક બીજને સંગત લાક્ષણિક સદિશ મેળવો.

(ક) (૧) જો સામાન્ય શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક બીજ $\lambda$ હોય તો દર્શાવો કે ૬
શ્રેણિક $adj$A નું લાક્ષણિક બીજ $|A|/\lambda$ છે.

(૨) સાબિત કરો કે આપેલા આત્મ મૂલ્યને સંગત જુદા જુદા આત્મ ૬
સદિશો મળે છે.

૬ (અ) જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એ અદિશ ચલ $t$ ના વિકલનીય સદિશ વિધેયો હોય તો ૬
$d/dt\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ શોધો અને તે પરથી સાબિત કરો કે $d/dt\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}\right)=\vec{a}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$

(બ) કોઈક બિંદુ-કણ એ રીતે ગતિમાન થાય છે કે જેથી તેનો સ્થાન સદિશ ૬
$\vec{r}=\cos\omega t\,\hat{i}+\sin\omega t\,\hat{j}$ (જ્યાં $\omega$ અચળ છે.) દર્શાવો કે

(૧) બિંદુ-કણનો $\vec{v}$ એ $\vec{r}$ ને લંબ છે.

(૨) $|\vec{a}|\propto|\vec{r}|$.

(ક) જો $f=x^3+y^3+3xyz$ હોય તો $grad\, f$ ની કિંમત શોધો તથા ૬
$grad\, f$ અપરિભ્રમણશીલ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

**અથવા**

૬ (અ) સદિશ બિંદુ વિધેય $\vec{f}$ ના કર્લની ($curl$) વ્યાખ્યા આપી સાબિત કરો કે ૬
$curl\left(\phi\vec{v}\right)=\left(grad\,\phi\right)\times\vec{v}+\phi\, curl\,\vec{v}$ .

(બ) જો $\vec{f}=xy^2\,\hat{i}+2x^2y\,\hat{j}-3yz^2\,\hat{k}$ હોય તો $(1,-1,1)$ બિંદુએ $div\vec{f}$ ૬
અને $curl\vec{f}$ મેળવો.

(ક) જો $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan\alpha\,\hat{k}$ હોય તો $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\;\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\;\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ ની કિંમત શોધો. ૬

## ENGLISH VERSION

**Instructions :**
(1) As per the instructions No. 1 of the page No. 1
(2) Figures to the right indicate marks.
(3) Follow usual notations.

1 (a) Answer the following : **5**
(i) State De' Moivre's theorem.
(ii) Write expansion of $\tan\alpha$ in terms of $\alpha$.
(iii) Write the principal value of $\operatorname{Log} x$.
(iv) State the condition that non-homogeneous system of equations has no solution.
(v) $d/_{dt}\left\{\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]\right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) Answer the following with calculation. **10**
(i) If $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$ then find $\rho_R(A)$.
(ii) If characteristic roots of a matrix A are –2, –2 and 4 then find characteristic equation of A.
(iii) Eliminate $\theta$ from $x = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta$ and $y = 2\sinh\theta\cosh\theta$.
(iv) Prove that $\sin 2x + i\sinh 2y = 2\sin(x+iy).\cos(x-iy)$.
(v) Wether vector $\vec{a} = (x+3y)\hat{i} + (y-3z)\hat{j} + (x-2z)\hat{k}$ is sole noidal.

2 (a) Obtain the expansion of $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ in terms of $\cos\theta$ and $\sin\theta$ (where $n \in N$) **6**

(b) Prove that $\tan^{-1}(\cosh\theta - \sinh\theta) = 1/_2\sin^{-1}(\sec h\,\theta)$. **6**

(c) Prove that $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta + 2\sin\theta - \sin 3\theta}{\theta + \tan\theta - \tan 2\theta} = -\dfrac{25}{14}$. **6**

**OR**

2 (a) Obtain the expansion of $\cos\alpha$ in terms of $\alpha$ (where $\alpha$ is in radian). **6**

(b) Prove that **6**

$(2\cosh\theta-1)(2\cosh 2\theta-1)(2\cosh 4\theta-1)(2\cosh\theta+1)=2\cosh 8\theta+1$

(c) If $x_r=\cos\left(\pi/2r\right)+i\sin\left(\pi/2r\right)$, $r=1,2,3.....$ then prove that $x_1.x_2.x_3........$ upto infinity $=\cos\pi$. **6**

3 (a) Find the value of $Log(\alpha+i\beta)$ , $\alpha,\beta\in R$. **6**

(b) Separate $\frac{e^{i\theta}}{1-k\,e^{i\phi}}$ into its real and imaginary parts. **6**

(c) Prove that $Tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\frac{1}{4}\{(4n+1)\pi+i\log 3\}$. **6**

**OR**

3 (a) State and prove Euler's theoem and hence express express $\cos\theta$ and $\sin\theta$ in terms of exponential function. **6**

(b) If $\alpha+i\beta=\sin^{-1}(u+iv)$ then prove that the equation having roots $\sin^2\alpha$ and $\cos h^2\beta$ is $x^2-\left(1+u^2+v^2\right)x+u^2=0$ **6**

(c) Prove that. $\log\sin(x+iy)=\frac{1}{2}\log\frac{(\cosh 2y-\cos 2x)}{2}$ **6**

$+i\tan^{-1}(\cot x\cdot\tanh y)$

4 (a) Prove that every square matrix A can be expressed uniquely as $P+i\,Q$ where $P$ and $Q$ are hermitian matrices. **6**

(b) If $A=\left[a_{ij}\right]$ where $a_{ij}=i\times j$ then show that matrix A is symmetric and if $a_{ij}=i^2-j^2$ then show that A is skew symmetric. **6**

(c) When two linear systems $A_1X=B_1$ and $A_2X=B_2$ of equations in $n$-unknowns are called equivalent. Show that following system are equivalent. **6**

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+2z&=3\\3y+\ z&=0\\x-2y&=1\end{aligned}\right\}\text{ and }\left\{\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,x&=\tfrac{3}{2}\\x-2y&=1\\3y+z&=0\end{aligned}\right..$$

**OR**

4 (a) Express a matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ into the row-reduced Echelon form. **6**

(b) Find $\rho_R(A)$ for matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. **6**

(c) Find the inverse of a metrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ by applying elementary row-operations. **6**

5 (a) Solve the following homogeneous system of linear equations : **6**

$$x + y - 3z + 2w = 0$$
$$2x - y + 2z - 3w = 0$$
$$3x - 2y + z - 4w = 0$$
$$-4x + y - 3z + w = 0$$

(b) Justify Cayley – Hamilton theorem for a matrix **6**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & - \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) (i) For non-singular matrices $A$ and $B$ show that eigen values of $A^{-1}B$ and $BA^{-1}$ are same. **6**

(ii) Prove that there exist unique eigen value corresponding to a given eigen vector X. **6**

**OR**

5 (a) The system of linear equation is **6**

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

find the value of $\lambda$ and $\mu$ for which the system has

(i) No solution

(ii) Unique solution and

(iii) Infinitely many solutions.

(b) Find the eigen values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ **6**

and obtain eigen vector corresponding to the smallest eigen value.

(c) (i) If eigen value of a non-singular matrix A is $\lambda$ **6**

then show that eigen value of matrix *adj*A is $|A|/\lambda$.

(ii) Prove that there exist inifinite eigen vectors corresponding to a given eigen value.

**6** (a) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are differentiable vectors of scalar **6**

variable $t$ then find $d/dt\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ and hence prove that

$$d/dt\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \vec{a}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}.$$

(b) A particle is moving such that its position vector **6**

$\vec{r} = \cos\omega t\,\hat{i} + \sin wt\,\hat{j}$ (where $\omega$ is constant) show that

(i) Velocity of a particle $\vec{v}$, is perpendicular to $\vec{r}$.

(ii) $|\vec{a}| \propto |\vec{r}|$.

(c) If $f = x^3 + y^3 + 3xyz$ then find $grad\ f$ and check wether **6**

$grad\ f$ is irrotational.

**OR**

**6** (a) Define the 'curl' of a vector point function $\vec{f}$ and **6**

prove that

$$curl\left(\phi\vec{v}\right) = \left(grad\ \phi\right)\times\vec{v} + \phi\ curl\ \vec{v}.$$

(b) If $\vec{f} = xy^2\,\hat{i} + 2x^2y\,\hat{j} - 3yz^2\,\hat{k}$ then find $div\vec{f}$ and $curl\vec{f}$ **6**

at point (1, –1, 1).

(c) If $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan\alpha\hat{k}$ then find the value of **6**

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right].$$